1) a)Demonstre o teorema da reciprocidade de Green: Se a densidade de cargas $\rho_1(\vec{r})$ dá origem ao potencial $\phi_1(\vec{r})$ e a densidade de cargas $\rho_2(\vec{r})$ produz o potencial $\phi_2(\vec{r})$ então vale a igualdade:

$$\int d^3r\rho_1(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) = \int d^3r\rho_2(\vec{r})\phi_1(\vec{r}). \tag{1}$$

Sugestão: Considere $\int d^3r\vec{E}_1(\vec{r}).\vec{E}_2(\vec{r})$ e faça integrações por partes após escrever os campos em termos dos potenciais.

b) Considere dois condutores distintos, a e b. Mostre que carregar um dos condutores com uma carga Q, mantendo o outro descarregado, dá origem a um potencial no outro, que é o mesmo da situação inversa: carregar o segundo com a carga Q mantendo o primeiro descarregado e considerar o potencial induzido no primeiro.

2) Usando o potencial de um dipolo:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_i\hat{r}_i}{r^2} \tag{2}$$

mostre que

$$E_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3P_j\hat{r}_j\hat{r}_i - P_i}{r^3} \tag{3}$$

Mostre que a integral deste campo criado pelo dipolo sobre uma esfera centrada na origem é nula se a integração angular for realizada antes da radial, ou se uma pequena esfera centrada na origem for excluída. Corrija a expressão do campo elétrico para que o seu valor médio na esfera coincida com $-\vec{P}/V_{\text{esfera}}$.

3) Mostre que a energia de interação entre dois dipolos, com momentos $\vec{P}^a$ e $\vec{P}^b$ tem a forma

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}[P_i^aP_i^b - 3P_i^a\hat{r}_iP_j^b\hat{r}_j] \tag{4}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor que une os dipolos.

Considere os casos de momentos de dipolo paralelos, antiparalelos e perpendiculares, para cada caso esclareça em que condições a força é atrativa ou repulsiva.

4) Considere dois anéis uniformemente carregados. Um deles tem densidade linear uniforme λ_1, raio R_1, e está no plano XY centrado na origem. O outro é paralelo a esse com centro no eixo z, no ponto $\vec{c} = L\hat{z}$ e tem densidade linear uniforme λ_2, e raio R_2.

a) Partindo do potencial exato criado por essa configuração de cargas ao longo do eixo z realize expansões adequadas para valores grandes de z. Expresse o resultado como uma soma em potências inversas de z. b)Encontre, partindo das definições, os momentos de monopolo e dipolo dessa configuração. Expresse a expansão do potencial em multipolos até os termos de dipolo. c) Compare os resultados de a e b. São compatíveis? Haverá termos de multipolos de ordem mais alta, ou eles são nulos. d) Se a origem for mudada para coincidir com o outro anel, o primeiro estará então centrado no ponto $-\vec{c}$. Como mudam os resultados dos momentos de monopolo e dipolo?

5) Uma casca esférica de espessura finita (não infinitesimal), centrada na origem, apresenta densidades superficiais de carga dadas por $\sigma_0 \cos\theta$ na superfície exterior e o valor simétrico, $-\sigma_0 \cos\theta$ na superfície interior. Encontre o potencial em todos os pontos do espaço . Sugestão: utilize o resultado já conhecido do potencial criado por uma única superfície. **A partir desse resultado**, considerando o potencial em regiões distantes da origem das esferas, discuta sobre quais os momentos de multipolo dessa configuração de cargas são distintos de zero. Calcule os momentos de monopolo e dipolo diretamente das definições e compare.